Smarandache对偶函数的一个猜想

乐 茂 华
（湛江师范学院 数学系，广东 湛江 524048）

摘 要：对于正整数 n，设 $S^*(n)$ 是 n 的Smarandache对偶函数. 该文证实了有关 $S^*(n)$ 的一个猜想.

关键词：阶乘；Smarandache对偶函数；猜想
中图分类号：O156 文献标识码：A 文章编号：1007-6883（2004）03-0001-02

设N是全体正整数的集合. 1980年，Smarandache[1]引入了一类有关阶乘的数论函数 $S(n)$，称为Smarandache函数，它等于适合

$$m! \equiv 0 \pmod{n}, \quad n \in \mathbf{N} \tag{1}$$

的最小正整数 m. 此后，Sándos[2]讨论了 $S(n)$ 的对偶形式 $S^*(n)$，称为Smarandache对偶函数，它等于适合

$$n \equiv 0 \pmod{m!}, \quad m \in \mathbf{N} \tag{2}$$

的最大正整数 m. 对此，Sándos提出了以下猜想：

猜想 对于正整数 n，设 $q(n)$ 是大于 $2n+1$ 的最小素数. 对于任何正整数 n，都有

$$S^*((2n-1)!(2n+1)!) = q(n)-1. \tag{3}$$

本文完整地证实了上述猜想，即证明了：

定理 （3）对于任何正整数 n 都成立.

证 假如（3）对于某个正整数 n 不成立，则必有

$$(2n-1)!(2n+1)! \not\equiv 0 \quad (\bmod\ q(n)). \tag{4}$$

因此，根据 $S^*(n)$ 的定义可知 $S^*((2n-1)!(2n+1)!) \leqslant q(n)-1$. 由于 $q(n)$ 是适合 $q(n) > 2n+1$ 的最小素数，所以根据Bertrand定理（参见文献[3]中的定理5.7.1）可知：

$$q(n) < 2(2n+1). \tag{5}$$

从（5）可知 $q(n)-1$ 的任何素因数 p 都满足

$$p \leqslant 2n-1. \tag{6}$$

对于正整数 a 以及素数 p，设 $d(a, p)$ 是 p 在 a 中的次数. 根据文献[3]定理1.11.1

收稿日期：2004—02—23
基金项目：国家自然科学基金项目（N_0. 10271104），广东省自然科学基金项目（N_0. 011781），广东省教育厅自然科学研究项目（N_0. 0161），湛江市988科技兴湛计划项目.

作者简介：乐茂华（1952—），男，上海市人，湛江师范学院数学系教授.

可知：对于任何正整数 k，都有

$$d(k!,p)=\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p^r}\right], \tag{7}$$

其中 $[k/p^r]$ 是 k/p^r 的整数部分. 假如

$$S^*((2n-1)!(2n+1)!)<q(n)-1, \tag{8}$$

则存在素数 p 适合

$$d((2n-1)!,p)+d((2n+1)!,p)<d((q(n)-1)!,p). \tag{9}$$

因此，从（7）和（9）可知：存在正整数 r 满足

$$\left[\frac{2n-1}{p^r}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^r}\right]<\left[\frac{q(n)-1}{p^r}\right]. \tag{10}$$

从（10）立得

$$1+\left[\frac{2n-1}{p^r}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^r}\right]\leqslant\left[\frac{q(n)-1}{p^r}\right]. \tag{11}$$

从（11）可得

$$4n<q(n)-1 \tag{12}$$

这一与（5）矛盾的结果. 由此可知（3）对任何正整数 n 都成立. 定理证完.

参考文献：

[1] Smarandache F. A function in the number theory [J]. Ann Timisoara Univ Ser Math，1980，28（1）：79～88.

[2] Sándos J. On certain generalizations of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions J，2000，11：202～212.

[3] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京：科学出版社，1979.

A Conjecture Concerning the Smarandache Dual Function

LE Mao-hua

（*Department of Mathematics*，*Zhanjiang Normal College*，*Zhanjiang* 524048，*China*）

Abstract：For any positive integer n，let $S^*(n)$ denote the Smarandache dual function. In this paper we verify a conjecture on $S^*(n)$.

Key words：Factorial；Smarandache dual function；conjecture